Geometrie

Klassenstufe 8

Vierecke

Datei Nr. 11211

Friedrich Buckel

Stand 20. April 2008

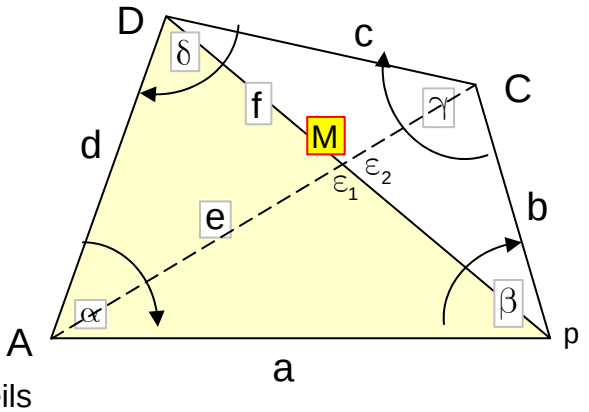
INTERNETBIBLIOTHEK FÜR SCHULMATHEMATIK

www.mathe-cd.de

Inhalt

1	**Allgemeines zu Vierecken**	1
2	**Konstruktion von Vierecken**	3
3	**Spezielle Vierecke**	7
	3.1 Trapeze	7
	3.2 Parallelogramme	13
	3.3 Raute, Rechteck, Quadrat	19
	3.4 Drachen	21
	3.5 Eigenschaften von Viereckarten	25
4	**Achsensymmetrie bei Vierecken** (Orthogonalsymmetrie – Schrägsymmetrie (Seitenhalbierendensymmetrie – Diagonalsymmetrie)	26
	4.1 Geradenspiegelungen	26
	4.2 Achsensymmetrische Vierecke	28
	4.3 Schrägspiegelung	30
	4.4 Schrägsymmetrische Vierecke	32
	4.5 Punktsymmetrische Vierecke	34
	4.6 Symmetrieeigenschaften der Viereckarten	36
5	**Wenn-Dann-Sätze**	38
	5.1 Identifizierung von Parallelogrammen	40
	5.2 Identifizierung von Rauten / Rechtecken	42
	5.3 Identifizierung von Trapezen	43
	5.4 Identifizierung von Drachen	44

1. Allgemeines zu Vierecken

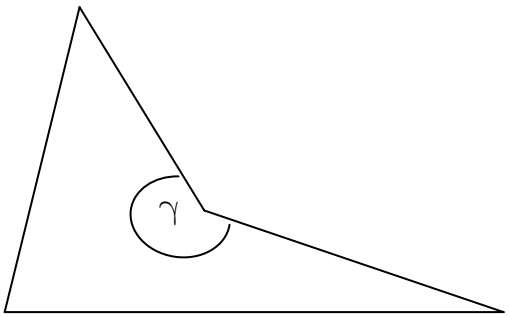


Nebenstehende Abbildung zeigt, wie man normalerweise die Bezeichnungen der Seiten (Kleinbuchstaben) und Winkel an den Eckpunkten ausrichtet.

Die beiden Diagonalen e = AC und f = BD zerteilen das Viereck in jeweils zwei Dreiecke. Das Teildreieck ABD wurde eingefärbt.
Die Diagonalen schneiden sich in einem Punkt M unter vier Winkeln, von denen jeweils zwei gleich groß sind. Zwei Winkel wurden mit ε_1 und ε_2 („Epsilon“) bezeichnet.

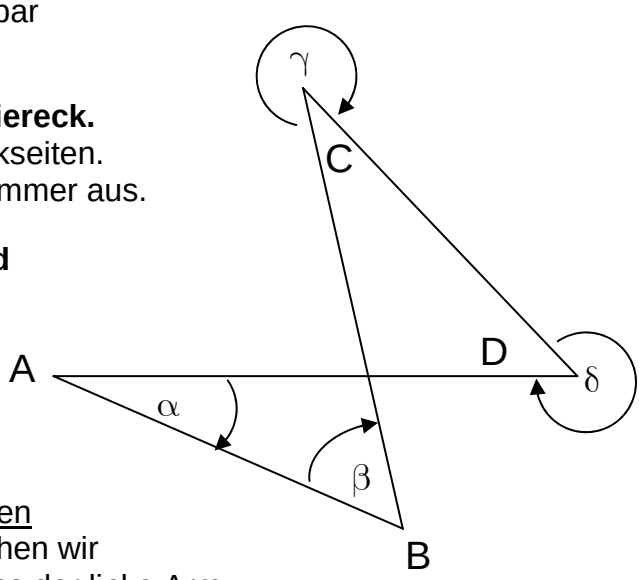
Um Irrtümern vorzubeugen: Normalerweise halbieren sich die Diagonalen der vier Winkel des Vierecks <u>nicht</u>. Wir werden noch Sonderfälle kennenlernen, in denen dies der Fall ist.

Es gibt **Sonderfälle von Viereckformen**:



Hier ist γ ein überstumpfer Winkel, d. h. sein Winkelmaß ist größer als 180°.

Bei manchen Konstruktionen ergibt sich dies als zweite Lösung.
Man muss dann von der Aufgabenstellung her entscheiden, ob diese Lösung brauchbar ist oder nicht.



Dieses Viereck ist ein **überschlagenes Viereck.**
Bei ihm schneiden sich sogar zwei Viereckseiten.
Wir schließen es als „entartetes Viereck“ immer aus.

Eine Besonderheit dieses Vierecks sind die Winkel. Dazu machen wir eine Wanderung entlang der Viereck-linien und zwar im obersten Bild und hier im 3. Bild !

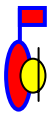
Wir stellen uns in A auf die Linie AB und gehen auf B zu. Dabei halten wir den <u>linken Arm ausgestreckt</u>! In B angekommen drehen wir uns um den Winkel β nach rechts, so dass der linke Arm den zu β gehörenden Bogen (mit Pfeil!) beschreibt.
Nun wandern wir von B nach C und halten wiederum den linken Arm ausgestreckt. In C angekommen drehen wir uns um γ nach rechts. Das macht in der Abbildung 1 keine Probleme, in der Abbildung 3 dagegen erkennt man, dass jetzt der Winkel γ außen liegt! Nun gehen wir von C nach D, drehen uns dort entsprechend und erleben denselben Effekt: Bei unserem überschlagenen Viereck, liegt δ wiederum außen! Grund genug also, von dieser Abart eines Vierecks die Finger zu lassen.

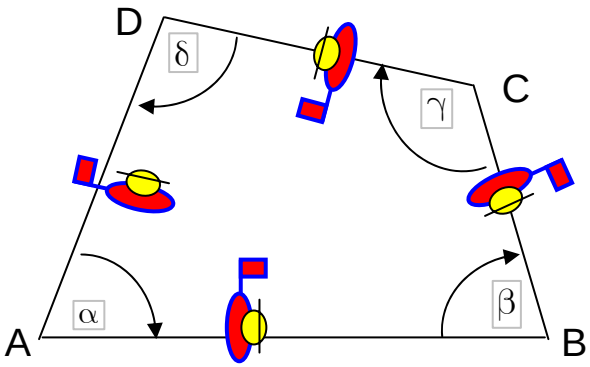
Dies gibt Anlass, über die Winkel eines Vierecks nachzudenken:

Winkel Eigenschaft aller „normalen“ Vierecke:

Die Winkelsumme in einem nicht überschlagenen Viereck beträgt 360°.

Dies zu beweisen ist ganz einfach und sollte man mit einer großen Schnur im Klassenzimmer oder Wohnzimmer einmal nachvollziehen. Dazu benötigt man vier Personen, welche eine etwa 6 m lange, zu einem Ring zusammengeknotete Schnur an vier Stellen A, B, C und D halten. Eine fünfte Person (unser „Winkelmesser“ WM) muss innerhalb dieses Vierecks den ganzen Umfang ablaufen und dabei trickreich die Winkel „messen“ – ohne einen Winkelmesser zu verwenden:

Die Figur  stellt unsere Person WM dar, die innen entlang der Seiten um das Viereck wandert. Der gelbe Kopf gibt nicht die Gehrichtung an, sondern die Richtung in der diese Person blickt. Und das Fähnchen ist die ausgestreckte linke Hand. (Wir schauen von oben auf das Geschehen.)



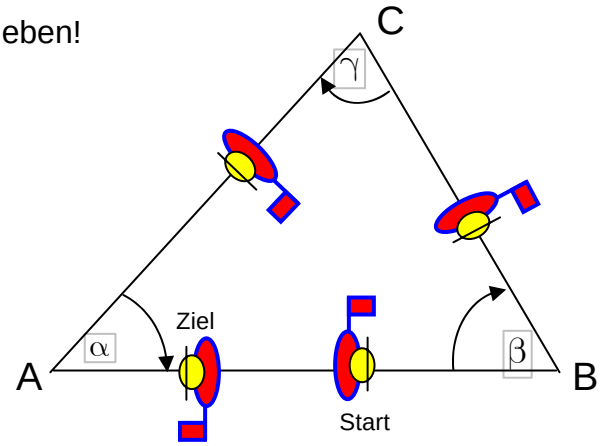
Bei unserem Beweis geht WM von A nach B, Blick nach B. Dort dreht er sich so, dass der linke Arm den Winkel β beschreibt. Jetzt dreht aber WM dem Punkt C den Rücken zu, also muss er rückwärts von B nach C wandern. In C dreht er sich wiederum im Uhrzeigersinn um den Winkel γ. Jetzt schaut er in Richtung D und geht vorwärts nach D. Dort dreht er sich im Uhrzeigersinn um den Winkel δ, worauf er A den Rücken zukehrt. Nun marschiert WM rückwärts nach A. Dort dreht er sich schließlich um α und er hat seine Ausgangsposition erreicht.

Wir halten fest: WM hat sich bei seiner Wanderung insgesamt um 360° gedreht.

Die Summe der Drehungen hat also 360° ergeben!

Zusatz: Winkelsumme im Dreieck

Die Wirkung dieses Beweises wird um so augefälliger, wenn man dies an einem Dreieck versucht. Nach einer Umkreisung landet WM dort auf AB in umgekehrter Position, d.h. er hat sich im Dreieck um 180° gedreht!



Man kann mit Schülern eine lange Schnur verknoten und dann ein Fünfeck oder Sechseck spannen und auf diese Weise ausmessen lassen !

2. Konstruktion von Vierecken

Bedenkt man die Tatsache, dass man ein Viereck durch eine Diagonale in zwei Dreiecke zerlegen kann, und man für ein Dreieck in der Regel drei Stücke kennen muss (um das ganze Dreieck zu konstruieren), dann muss man noch zwei Seiten zusätzlich kennen um ein komplettes Viereck zu haben:

Ein Viereck konstruiert man also in der Regel aus 5 gegebenen Teilen.

Grundregeln einer Konstruktion

Regel Nr. 1: **Erstelle eine Planfigur.**

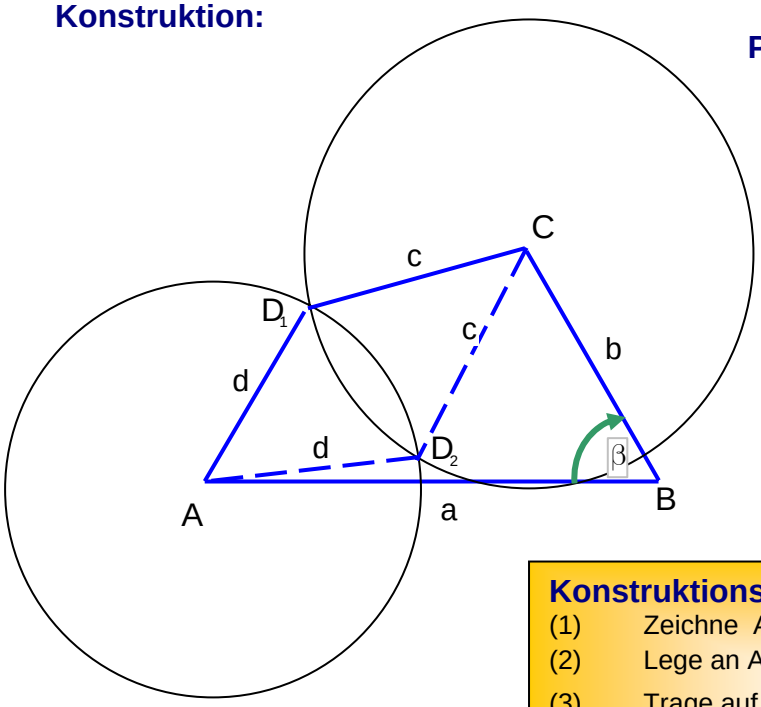
In sie trägt man mit (grüner) Farbe alles ein, was gegeben ist. Sie hilft beim Finden der Konstruktionsschritte.

Regel Nr. 2: **Erstelle die Konstruktionszeichnung.**

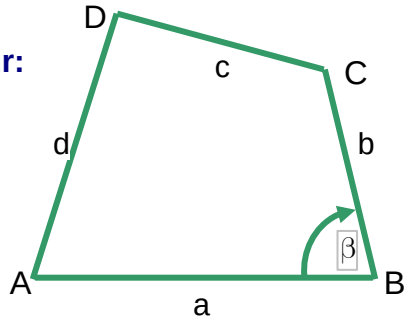
Regel Nr. 3: **Schreibe einen kurzen und doch präzisen Konstruktionstext.**

Beispiel 1: Gegeben sind
$a = 6$ cm, $\beta = 75^{\circ}$, $b = 3{,}5$ cm, $c = 3{,}1$ cm und $d = 2{,}7$ cm.

Konstruktion:



Planfigur:



Konstruktionstext: (Vorschlag)

(1) Zeichne AB = a.

(2) Lege an AB in B den Winkel β an.

(3) Trage auf dem freien Schenkel von β BC = b ab.

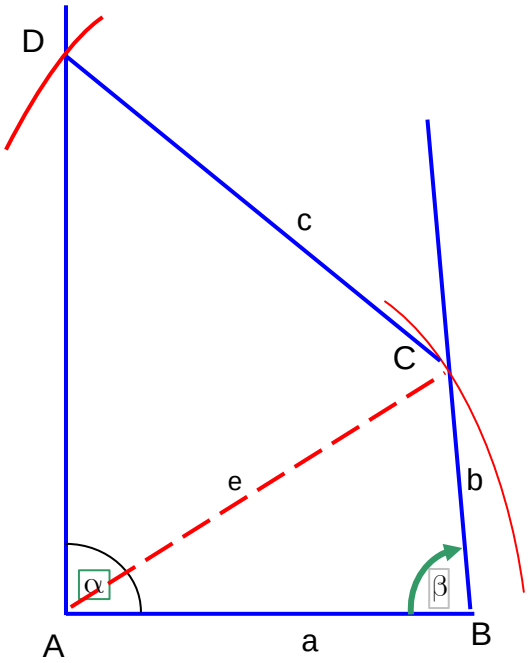
(4) Der Kreis um C mit Radius c und der Kreis um A mit Radius d schneiden sich in D_1 und D_2 .

Ergebnis: Es gibt zwei Vierecke, die den Anforderungen entsprechen, $ABCD_2$ ist überstumpf.

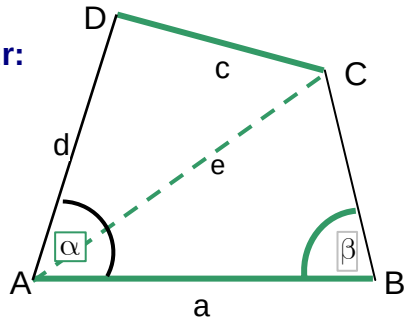
Beispiel 2:

Gegeben sind (jetzt mit 2 Winkeln)
a = 5,4 cm, $\alpha = 90^{o}$, β = 85°, e = 6,0 cm und c = 5,7 cm.

Konstruktion:



Planfigur:



Konstruktionstext: (Vorschlag)

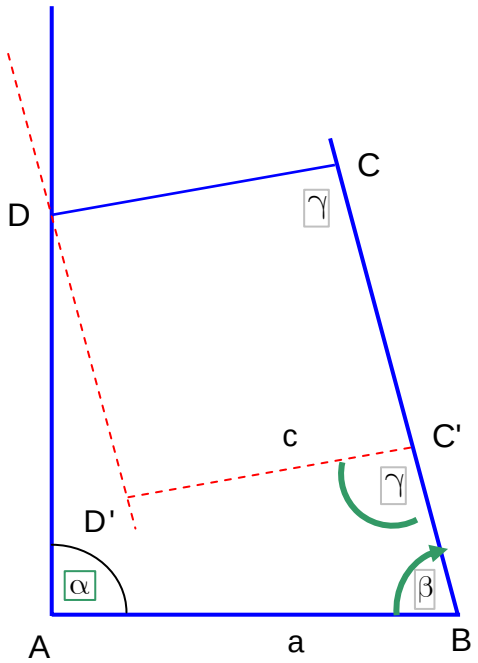
(1) Zeichne AB = a.
(2) Lege an AB in A den Winkel α und in B den Winkel β an.
(3) Der Kreis um A mit Radius e schneidet den freien Schenkel von β in C.
(4) Der Kreis um C mit Radius c schneidet den freien Schenkel von α in D.

Ergebnis: Es gibt genau ein Viereck, das den Anforderungen entspricht: ABCD.

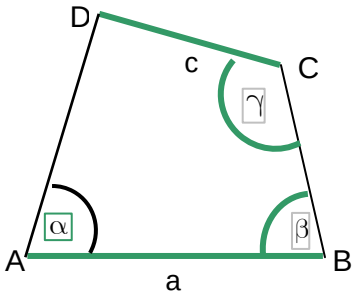
Beispiel 3:

Gegeben sind (jetzt mit 3 Winkeln)
a = 5,4 cm, $\alpha = 90^{o}$, β = 75°, $\gamma = 85^{o}$ und c = 3,3 cm.

Konstruktion:



Planfigur:



Konstruktionstext: (Vorschlag)

(1) Zeichne AB = a.
(2) Lege an AB in A den Winkel α und in B den Winkel β an.
(3) Lege in einem beliebigen Punkt C' auf dem freien Schenkel von β den Winkel γ an und trage auf dessen freiem Schenkel c = C'D' ab.
(4) Die Parallele zu BC' durch D' schneidet den freien Schenkel von α in D.
(5) Die Parallele zu C'D' durch D schneidet die Halbgerade (BC') in C.

Ergebnis: Es gibt genau ein Viereck, das den Anforderungen entspricht: ABCD.

Zu Beispiel 3:

Hier weiß man zuerst nicht, wo man den Winkel γ anlegen soll, denn es gibt zunächst keine Möglichkeit, C zu konstruieren: Man kennt weder b noch e, so dass die beiden Möglichkeiten, die man in Beispiel 1 und 2 hatte, nicht anwendbar sind.

Daher arbeitet man mit der **Parallelenmethode**:

Man wählt einen beliebigen Punkt C' auf dem freien Schenkel von β und legt dort den Winkel γ an, so dass man auf seinem freien Schenkel die vorläufige Strecke c abtragen kann. Deren Endpunkt nennt man D'. Es kann noch nicht der richtige Endpunkt D sein, weil dieser auf dem freien Schenkel von α liegen muss.

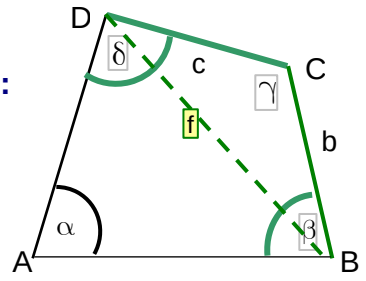
Daher zeichnet man jetzt eine Parallele zu BC' durch D'. Diese schneidet den freien Schenkel von α in D. Dass dies nun D ist, erkennt man daran, dass jetzt alle Bedingungen erfüllt sind: Der Winkel in C hat die Größe von γ (Stufenwinkel an Parallelen sind gleich groß), und CD hat die Länge von c.

Schwer

Beispiel 4:

Gegeben sind (jetzt mit 3 Winkeln)
b = 4,0 cm, $\alpha = 66^{\circ}$, $\beta = 81^{\circ}$, $\delta = 100^{\circ}$ und f = 5,0 cm.

Planfigur:



Überlegung zur Konstruktion:

Wenn man diese Aufgabe Schülern ohne Hilfe übergibt, finden die meisten keine Konstruktion.

Man kann zwar mit der Seite BC = b beginnen und dort β anlegen, doch man kennt nicht die Länge von a und man kennt vor allem nicht den Winkel γ, der äußerst hilfreich wäre. Schüler, die γ einsetzen wollen, kommen dann auf die Idee, diesen Winkel berechnen zu wollen, denn die Winkelsumme im Viereck beträgt 360°, kennt man drei Winkel, kann man den vierten also wie hier γ berechnen. Doch es hat sich eingebürgert, dass man bei Konstruktionen gewisse „Spielregeln“ einhält und dazu gehört, dass man nichts verwenden soll, was man berechnet hat.

Doch was hier auf algebraische Art verboten ist, nämlich einen Winkel zu berechnen, lässt sich geometrisch bewerkstelligen. Man kann γ konstruieren, und zwar als Restwinkel auf 360°.

KONSTRUKTION EINES FEHLENDEN WINKELS γ IM VIERECK:

Rest auf CD